Introduzione alla dinamica linearizzata

Dinamica modale ed analisi sismica

Raffaele Casciaro

Università della Calabria
http://www.labmec.unical.it

Newsoft s.a.s. - Cosenza
http://www.newsoft-eng.it

L'Aquila–Pescara ottobre 2010

Obbiettivo della presentazione

Si vuole fornire una introduzione alla dinamica linearizzata e del suo uso nell'analisi sismica.

La presentazione affronterà i seguenti argomenti:

- **Linearizzazione delle equazioni del moto.**
  Modellazione elasto–viscosa equivalente, motivazioni, scelte possibili e limiti della equivalenza.
- **Decomposizione spettrale.** Modi e periodi propri di vibrazione. Soluzione disaccoppiata per combinazione modale.
- **Uso degli spettri di risposta.**
- **Analisi sismica.**

Dissipazione dinamica

- La risposta di una struttura soggetta a carichi dinamici dipende in modo rilevante dai meccanismi dissipativi che le consentono di disperdere l'energia fornita dall'esterno impedendo che questa possa accumularsi nella struttura in forma di energia elastica di deformazione e generare tensioni elevate.
- La dissipazione è essenzialmente originata dal comportamento elastoplastico che porta al formarsi di cicli di isteresi (l'area del ciclo corrisponde all'energia dissipata). Altre forme di dissipazione (effetto aerodinamico, ..) sono quantitativamente irrilevanti.
- Il comportamento nonlineare svolge pertanto un ruolo essenziale nella risposta dinamica delle strutture. ma, al momento, l'onere computazionale richiesto da una analisi dinamica condotta in campo nonlineare è ancora elevato.
- L'analisi richiede un approccio incrementale al passo e coinvolge un numero elevato di passi (dell'ordine delle migliaia).
  Se i carichi sono noti solo in forma probabilistica (come in analisi sismica), la risposta può essere solo caratterizzata attraverso simulazioni Montecarlo in cui l'analisi è ripetuta per un numero rilevante di sequenze di carico.

Il modello elasto–viscoso equivalente

- La complesstà di un approccio realmente non-lineare spinge verso soluzioni lineari approssimate ottenute sostituendo all'effettivo meccanismo dissipativo di tipo isteretico un meccanismo "equivalente" di tipo viscoso attraverso la scrittura dell'equazione di equilibrio dinamico nella forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}[t] + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}[t] + \mathbf{K}\mathbf{u}[t] = \mathbf{f}[t]$$

  dove $\mathbf{K}$ è la matrice di rigidezza, $\mathbf{C}$ la matrice di viscosità, $\mathbf{M}$ la matrice delle masse, $\mathbf{u}[t]$ il vettore degli spostamenti, $\mathbf{f}[t]$ il vettore delle forze e si è indicato con il punto la derivazione rispetto al tempo.
- La validità di questa approssimazione è legata ad una scelta appropriata delle matrici $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{C}$ "equivalenti". Generalmente si fa questa scelta:
  - $\mathbf{M}$ è definita in base all'effettiva distribuzione di masse (o ad un sua accettabile approssimazione).
  - $\mathbf{K}$ è presa pari alla matrice elastica iniziale.
  - $\mathbf{C}$ è scelta in modo da produrre la stessa dissipazione energetica fornita dal meccanismo isteretico interno.
- L'obbiettivo resta quello di ottenere, a parità di sollecitazione esterna, le stesse deformazioni massime che si produrrebbero nella struttura reale a comportamento elastoplastico.

Osservazioni sulla equivalenza

- La rigidezza della struttura varia in funzione dell'escursione in campo plastico. Una rigidezza "equivalente" costante e pari a quella elastica iniziale corrisponde quindi ad una approssimazione comunque molto rozza.
- Il meccanismo dissipativo reale della struttura è legato all'aria del ciclo di isteresi e quindi all'ampiezza di escursione in campo plastico, e non alla velocità con cui il ciclo viene percorso. Riferirsi ad una dissipazione legata alla velocità e non alla escursione, rende quanto meno ambiguo il concetto di equivalenza.
- Già alla nascita di questo concetto (primi anni '60), vi erano forti dubbi su una sua accettabile definizione, da parte degli stessi ricercatori che la proponevano, anche nel caso semplicissimo di oscillatore elementare ad un grado di libertà.
- Nel caso di strutture a più gradi di libertà, si aggiunge una ulteriore complicazione. Infatti, mentre la risposta "equivalente" lineare presenta comunque modi di vibrazione disaccoppiati, in rapporto diretto con la sola eccitante esterna, la risposta nonlineare è caratterizzata da forte accoppiamento modale e presenza di fenomeni caotici.

Vibrazioni libere

Lo studio della risposta dinamica è condotto discutendo preliminarmente il problema di *vibrazioni libere non dissipative* retta dall'equazione omogenea

$$\mathbf{K}\mathbf{u}[t] + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}[t] = \mathbf{0}$$

la cui soluzione può essere ottenuta in funzione degli autovettori $\mathbf{y}_i$, ed degli autovalori ω_i^2, del problema generalizzato agli autovalori:

$$\mathbf{K}\mathbf{y} + \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Quest'ultimo, per $\mathbf{K} \geq \mathbf{0}$ ed $\mathbf{M} > \mathbf{0}$ simmetriche di ordine n, ammette n soluzioni distinte $\mathbf{y}_i$, $i = 1 \ldots n$ caratterizzate dalle condizioni:

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{M}\mathbf{y}_j = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{array} \right. \qquad \mathbf{y}_i^T \mathbf{K}\mathbf{y}_j = \left\langle \begin{array}{ll} \omega_i^2 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{array} \right.$$

Pertanto, espandendo nella base $\mathbf{y}_i$,

$$\mathbf{u}[t] := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i w_i[t] \quad , \quad \mathbf{y}_i^T \{\mathbf{K}\mathbf{u}[t] + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}[t]\} = 0 \; , \; i = 1 \cdots n$$

l'equazione dinamica si riscrive in forma disaccoppiata:

$$\ddot{w}_i + \omega_i^2 w_i = 0 \; , \; i = 1 \cdots n$$

Soluzione per sovrapposizione modale

- La soluzione generale della singola equazione è rappresentabile nella forma:

$$w[t] = \bar{w}_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

dove le costanti $\bar{w}_i$ e ϕ_i sono definite dalle condizioni iniziali.

- Pertanto la soluzione del problema di vibrazioni libere non smorzate è rappresentabile nella forma:

$$\mathbf{u}[t] := \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i \sin(\omega_i t + \phi_i)\mathbf{y}_i$$

che può leggersi come sovrapposizione di n contributi, ciascuno dei quali ha andamento sinusoidale con periodo $T_i = 2\pi\,\omega_i$, forma $\mathbf{y}_i$, ampiezza $\bar{w}_i$ e fase ϕ_i. Le quantità $\mathbf{y}_i$ ed ω_i sono chiamate, rispettivamente, *modi* e *frequenze proprie* di vibrazione del sistema. Le quantità $\bar{w}_i$ e ϕ_i sono determinate in accordo con le condizioni iniziali.

Vibrazioni forzate

- Generalmente si assume che anche la matrice di viscosità $\mathbf{C}$ sia "disaccoppiabile", cioè che risulti:

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{C} \mathbf{y}_j = \left\langle \begin{array}{cc} \nu_i \omega_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{array} \right.$$

  dove $\nu_i \geq 0$ rappresenta il *fattore di smorzamento* associato al modo i–esimo, da valutare in funzione proprietà dissipative del sistema.

- In tali condizione l'analisi per disaccoppiamento modale può essere estesa al caso generale di presenza di forze viscose e di eccitazione esterna. Si ottiene infatti:

$$\ddot{w}_i + \nu\omega\dot{w}_i + \omega_i^2 w_i = a_i[t]$$

  dove la componente forzante $a_i[t]$ è definita dalla:

$$a_i[t] := \mathbf{y}_i^T \mathbf{f}[t]$$

- L'assunzione di viscosità disaccoppiabile fornisce una notevole semplificazione all'analisi, accettabile solo in ragione delle ambiguità con cui, comunque, verrebbe costruita la matrice $\mathbf{C}$.

Soluzione in termini di escursione massima

La soluzione della singola equazione modale:

$$\ddot{w}_i + \nu\omega \dot{w}_i + \omega_i^2 w_i = a_i[t]$$

può essere condotta con gli strumenti standard del calcolo differenziale. In particolare, la massima escursione

$$\bar{w}_i := \max\{w_i[t]\}$$

raggiunta da un modo inizialmente in quiete, può essere espresso nella forma:

$$\bar{w}_i = \frac{\bar{a}_i}{\omega_i^2} f_r[\omega_i, \nu_i, c_i[t]]$$

dove $\bar{a}_i := \max\{a_i[t]\}$ rappresenta il massimo valore raggiunto dall'eccitazione modale $a_i[t]$ ed $f_r[\cdots]$ è il *fattore di amplificazione della risposta* funzione della frequenza ω_i e dello smorzamento ν_i del sistema e dell'andamento temporale della forzante $a_i[t]$.

Analisi sismica

In presenza di eccitazione sismica l'equazione dinamica può essere scritta nella forma

$$\mathbf{K}\mathbf{u}[t] + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}[t] + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}[t] = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}$$

dove **u** rappresenta lo spostamento relativo della struttura ed **ü** lo spostamento rigido prodotto dal moto alla base della struttura, che può essere espresso nella forma.

$$\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{u}}\ddot{w}_g$$

Si ottiene il sistema disaccoppiato:

$$\ddot{w}_i + \nu_i\omega_i\dot{w}_i + \omega^2 w_i = c_i[t] := f_{pi}\ddot{w}_g \quad , \quad f_{pi} := \mathbf{y}_i^T\mathbf{M}\bar{\mathbf{u}}$$

dove f_{pi} è chiamato *fattore di participazione*.
In termini di valori massimi dell'ampiezza modale si ha quindi:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{\omega_i^2} f_{pi}\, S[T_i] \quad , \quad S[T_i] := f_{ri}\, \ddot{w}_{gmax}$$

dove **l'accelerazione spettrale $S[T_i]$, raccoglie in un unico parametro opportunamente tarato** tutta l'informazione sull'azione sismica.

Combinazione delle sollecitazioni

Le sollecitazioni $\bar{\mathcal{S}}$ utili ai fini della verifica si ottengono combinando i singoli contributi modali $\bar{\mathcal{S}}_i$. Data la non contemporaneità dei massimi, la combinazione non è fatta per somma di valori ma è ricondotta a quella dei segnali random, interpretando il $\bar{\mathcal{S}}_i$ come valore caratteristico del segnale $\mathcal{S}_i[t]$.

- Per una distribuzione Gaussiana a media nulla, il valore caratteristico, inteso come frattile, è legato allo scarto quadratico medio e ne segue la stessa legge di combinazione. In particolare, se i segnali sono scorrelati, la combinazione si ottiene come radice quadrata della somma dei quadrati (SRSS)

$$\bar{\mathcal{S}} = \pm\sqrt{\bar{\mathcal{S}}_1^2 + \bar{\mathcal{S}}_2^2 + \cdots + \bar{\mathcal{S}}_n^2}$$

- Altrimenti, in caso di parziale correlazione segue una combinazione più complessa, retta da una matrice di correlazione A_{ij}:

$$\bar{\mathcal{S}} = \pm\sqrt{\bar{\mathcal{S}}^2} \quad , \quad \bar{\mathcal{S}}^2 := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\bar{\mathcal{S}}_i\bar{\mathcal{S}}_j$$

  Nella combinazione CQC la correlazione è legata alla vicinanza dei periodi.
- Il contributo dei modi a frequenza elevata diventa rapidamente trascurabile e **spesso** ci si riduce a considerare solo i primi modi di vibrazione.